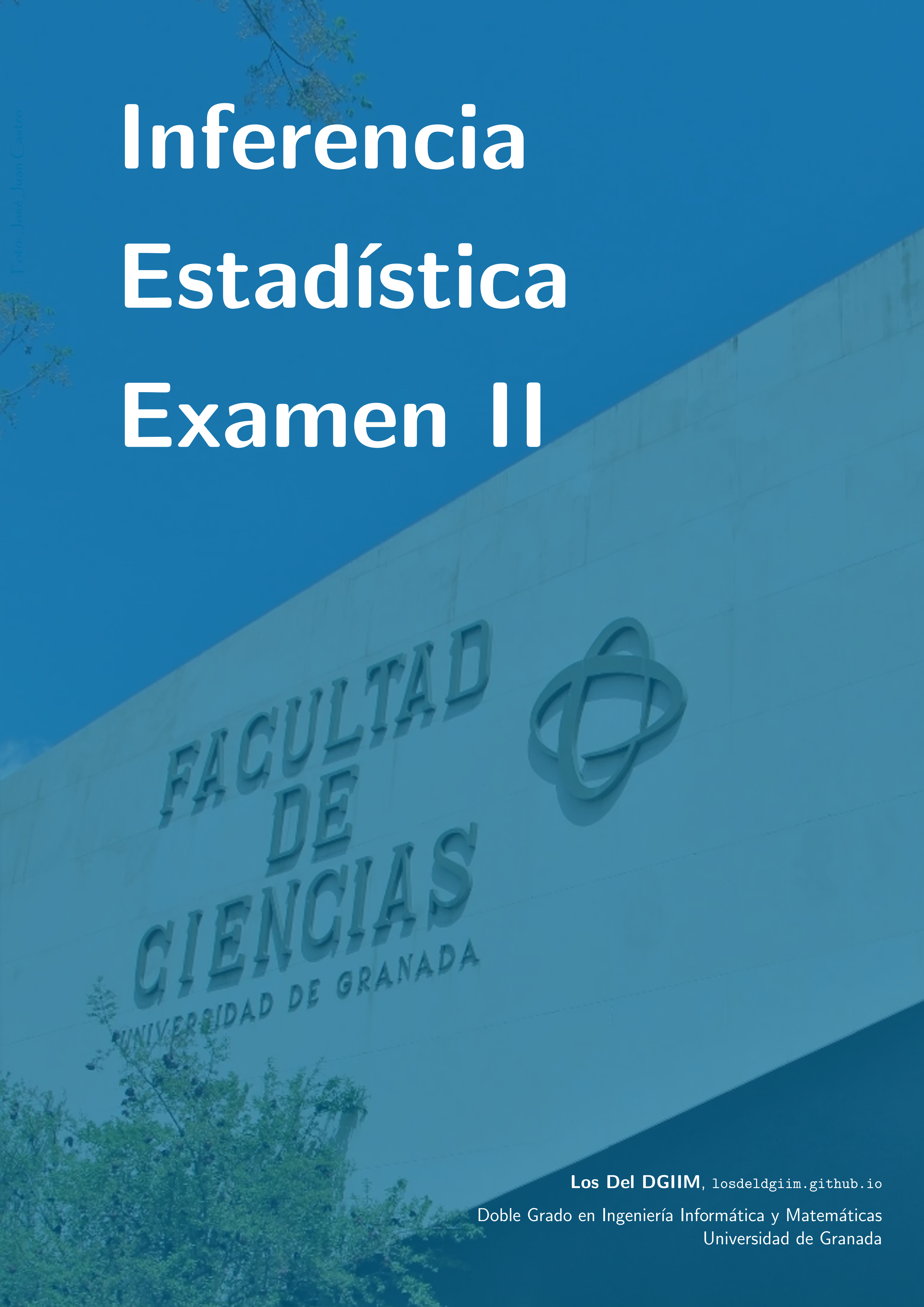
Inferencia Estadística Examen II



Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Doble Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas
Universidad de Granada

Inferencia Estadística Examen II

Los Del DGIIM, `losdeldgiim.github.io`

Granada, 2026

Asignatura Inferencia Estadística.

Curso Académico 2024-25.

Grado Grado en Matemáticas y Grado en Ingeniería Informática y Matemáticas.

Descripción Examen Ordinario.

Ejercicio 1.

a) Sea $(X_1, \dots, X_{n_1})$ una m.a.s. de una variable $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_1^0, \sigma_1^2)$ e $(Y_1, \dots, Y_{n_2})$ una m.a.s. de $Y \rightsquigarrow \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ siendo $\mu_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ desconocidos y ambas muestras independientes. Determinar un pivote para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$ basado en

$$U = \sum_{i=1}^{n_1} (X_i - \mu_1^0)^2, \qquad V = \sum_{j=1}^{n_2} (Y_j - \overline{Y})^2$$

donde $\overline{Y}$ es la media muestral. Dar la demostración detallada para obtener la distribución del pivote, justificando todos los pasos necesarios (basándose únicamente en las propiedades de la distribución $\chi^2(n)$ y el Lema de Fisher).

b) Sea $X_1, \dots, X_n$ muestra aleatoria simple de X con $F_\theta(x) = 1 - e^{\theta - x}, \quad x > \theta$. Encontrar el intervalo de confianza para θ de menor longitud media uniformemente a nivel de confianza $1 - \alpha$, basado en el estadístico $T = \min X_i$.

Ejercicio 2. Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria X con función de densidad

$$f_\theta(x) = \frac{1}{2\theta\sqrt{x-1}}; \qquad 1 < x \leqslant \theta^2 + 1$$

a) Encontrar, si existe, el UMVUe para la función paramétrica $g(\theta) = {}^1/_\theta$, justificando detalladamente el por qué de la no existencia si corresponde.

b) Expresar la función de verosimilitud de $\lambda = \theta^2$ asociada a una realización muestral cuyo máximo valor es 5.

Ejercicio 3.

a) Sea X una variable aleatoria continua con distribución en una familia regular en el sentido de Fréchet-Crámer-Rao con función de densidad

$$f_\theta(x) = exp[Q(\theta)T(x) + D(\theta) + S(x)], \qquad x \in \mathcal{X}, \quad \theta \in \mathbb{R}^+$$

donde $T(X)$ es un estimador insesgado de θ^4, regular, tal que $Var_\theta[T(X)] = \theta^2$. Calcular las funciones $Q(\theta)$ y $D(\theta)$ sabiendo que $Q(1) = 0$ y $D(0) = 1$.

b) Sea $(X_1, \dots, X_n)$ una muestra aleatoria simple de una variablea aleatoria X con función de densidad:

$$f_\theta(x) = \frac{\theta}{x^{1+\theta}}, \qquad x > 1$$

a) Sabiendo que la familia de distribuciones es regular y $E_\theta[\ln(X)] = \frac{1}{\theta}$ y ${}_\theta[\ln(X)] = \frac{1}{\theta^2}$, calcular la función de información asociada a la muestra. Encontrar la clase de funciones paramétricas que admiten estimador eficiente y los estimadores correspondientes.

b) Calcular la cota para la varianza de estimadores insesgados en θ^2, regulares, y justificar si se alcanza o no dicha cota.

Ejercicio 4. Encontrar el test más potente de tamaño arbitrario para contrastar

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 3 \\ H_1 : \theta = \theta_1 \end{cases}$$

con $\theta_1 < 3$, a partir de muestra muestra aleatoria simple $(X_1, \ldots, X_n)$ de una variable aleatoria X con función de densidad dada en el Ejercicio 2. Calcular la potencia del test obtenido.
Aplicaciones: Si se considera una muestra de tamaño 4:

a) Determinar para qué valores de θ_1 la potencia del correspondiente test de Neymann-Pearson de tamaño 0,05 es como mínimo 0,8.

b) Usando el test óptimo a nivel de significación 0,1 para contrastar

$$\begin{cases} H_0 : \theta = 3 \\ H_1 : \theta = 1{,}8 \end{cases}$$

¿qué decisión debe tomarse si el mayor de los valores observados es 4,2?

Ejercicio 5.

a) Sea (X, Y) un vector aleatorio bidimensional.

  a) ¿En qué consiste el problema de regresión lineal de Y sobre X? Especificar las hipótesis iniciales para su resolución.

  b) Detallar el modelo que debe usarse para resolver el problema anterior, especifiando qué es cada componente y qué describe cada una de las variables aleatorias que aparecen. Demostrar que es un modelo de Gauss-Markov, imponiendo, si es necesario, hipótesis adicionales sobre las variables observadas.

b) Se desea comparar el volumen de ventas de cierto artículo en tres ciudades diferentes. Para ello se toma una muestra de establecimientos en cada ciudad y se mide el volumen de ventas, en miles de artículos durante los últimos diez meses, obteniéndose:

Ciudad 1	30	20	27.5	32.5		
Ciudad 2	20	32.5	37.5	30	35	25
Ciudad 3	15	15	25	20	25	

¿Proporcionan estos datos evidencia para rechazar que las ventas se distribuyen de igual forma en las tres ciudades, al nivel de significación 0,025? Especificar las hipótesis sobre la distribución de las variables aleatorias involucradas en este problema, así como las hipótesis concretas que se están contrastando.